

N84-28992

TM-77454

AURORA SECO TORRECILLAS (\*)

JOSE FERRER POLO (\*\*)

ANTONIO AUCEJO PEREZ (\*\*\*)

(\*) Doctora, profesora ayudante del Dpto. de Química Técnica.  
Facultad de Químicas de Valencia.

(\*\*) Doctor, profesor adjunto del Dpto. de Ingeniería Sanitaria.  
Escuela Politécnica de Ingenieros de Caminos de Valencia.

(\*\*\*) Doctor, profesor agregado del Dpto. de Química Técnica.  
Facultad de Químicas de Valencia.

## RESUMEN

Dado el elevado número de tests que es necesario realizar para la determinación del comportamiento de las distintas barbotinas en el proceso de filtración a presión se consideró interesante la utilización de nuevas técnicas de tratamiento de dato que con un número reducido de datos experimentales permitieran la realización de un ajuste riguroso del parámetro a de la ecuación representativa del proceso, directamente relacionado con la resistencia específica de la torta.

En el presente trabajo se expone la utilización de un método de tratamiento de datos basado en la aplicación de algoritmo propuesto por Kalman, al proceso de filtración a presión constante, así como sus ventajas. Por último se realiza una comparación con el método de los mínimos cuadrados.

## SUMMARY

As the study of the behaviour of different kinds of barbotines in pressure filtration requires a considerable number of tests, the convenience of using new developed data processing methods was studied, which, based on a small quantity of experimental data, would allow the stringent adjustment of the parameter of the equation representing the process, which is in direct relationship to the specific strength of the lining.

In the present paper the use of a data processing method based on the algorithm proposed by Kalman and its application to the filtration process at constant pressure are described as well as the advantages of this method. Finally this technique is compared with the method of the smallest squares.

## RESUME.

Etant donnée la grande quantité de tests nécessaires pour déterminer le comportement des différentes barbotines pendant du procès de filtration à pression, on considère intéressant le recours à des techniques nouvelles d'utilisation de données qui permettraient avec une quantité réduite de données expérimentales, la réalisation d'un ajustage rigoureux du paramètre (a) de l'équation représentative du procès, directement relationné avec la résistance spécifique de la Tortue.

Dans ce travail on explique l'utilisation d'une méthode de traitement de données qui a pour base l'application de l'algorithme proposé par Kalman, au procès de filtration à pression constante, aussi bien que ses avantages. Enfin on fait une comparaison avec la méthode des minimes carrés.

## ZUSAMMENFASSUNG.

In Anbetracht der grossen Anzahl von Versuchen, die zur Bestimmung des Verhaltens verschiedenartiger Schlichker während des Druckfilterprozesses erforderlich sind, wurde der Einsatz neuartiger DV-Verfahren als lohnend betrachtet, die mit einer geringen Menge experimenteller Daten die exakte Einstellung des Parameters der den Prozess darstellenden Gleichung gestatten, der zu der spezifischen Festigkeit des Kuchens in Beziehung steht.

In der vorliegenden Arbeit werden eine auf der Benutzung des von Kalman vorgeschlagenen Algorithmus beruhende Methode und ihre Anwendung auf den Filterprozess bei konstantem Druck beschrieben; die Vorteile dieses Verfahrens werden erläutert. Abschliessend erfolgt ein Vergleich desselben mit der Methode der Kleinsten Quadrate.

## 1. INTRODUCCION.

Para determinar los parámetros caracterizadores de una barbotina en el proceso de filtración a presión y predecir su comportamiento a escala industrial, es necesario realizar un elevado número de tests de laboratorio, por lo que resulta muy interesante la utilización de técnicas de tratamiento de datos lo más eficientes posible que proporcionen un ahorro del número de pruebas a realizar así como un análisis estadístico de los resultados obtenidos.

En el caso que nos ocupa la mayoría de los trabajos realizados para mejorar la planificación de los experimentos y el tratamiento de los datos se han orientado hacia el cálculo de los valores de la resistencia específica (o cualquier otro parámetro relacionado con ella) para predecir los resultados a escala industrial. (1, 2).

En este trabajo se propone un procedimiento de tratamiento de datos experimentales, ya descrito en la bibliografía, para la obtención de dicho parámetros y de su fiabilidad, en función de los datos utilizados.

### 1.1. ECUACION TEORICA.

Como se indicó en la primera parte de este trabajo (1), la ecuación teórica representativa de la filtración a presión es:

$$\frac{t}{V} = \frac{\mu \rho x \cdot \alpha}{(1-Mx)2k \cdot \Delta P \cdot A^2} + \frac{\mu R_m}{k \cdot \Delta P \cdot A} \quad (1)$$

que puede escribirse en la forma simplificada

$$\frac{t}{V} = a V + b \quad (2)$$

Dado que en la mayoría de los casos la resistencia ofrecida por el medio filtrante es despreciable frente a la resistencia de la torta (1,2,3), la evaluación del coeficiente  $b$  resulta innecesaria. Por el contrario, la determinación del coeficiente  $a$  es de gran importancia por ser el que caracteriza la filtrabilidad de una barbotina dada, para unas condiciones determinadas.

## 2. ALGORITMO DE KALMAN.

El procedimiento propuesto es el resultado de la aplicación del algoritmo de Kalman (4 y 5) al proceso de filtración a presión constante.

Este algoritmo permite ir obteniendo unos valores "mejorados" de las variables y parámetros, cada vez que se introduce un nuevo punto experimental, utilizando un modelo numérico preestablecido. Para ello se emplea la expresión:

$$h_{ij|i} = h_{ij|i} + G_i \xi_j \quad (3)$$

Estimación mejorada para el tiempo $i$ .	Predicción basada en la información disponible hasta el tiempo $j$ ( $i > j$ ).	Corrección debida a las nuevas medidas realizadas en el tiempo $i$ .
--	---	--

donde

- $h$ : vector formado por las distintas variables que intervienen.
- $\xi_i$ : vector diferencia entre los valores predichos y los medidos para un tiempo  $i$ .
- $G_i$ : matriz de ganancia de Kalman, que determina la influencia relativa de las componentes del vector  $\xi_i$ .

Kalman utiliza como parámetro estadístico caracterizado de la exactitud del método el valor medio del cuadrado de los errores (diferencia entre el valor "mejorado" y el valor exacto), y trata de minimizarlo.

A continuación se expone la aplicación de este método para el tratamiento de los datos experimentales obtenidos en el proceso de filtración a presión constante y que fueron presentados en trabajos anteriores.

### 2.1. MODELO MATEMÁTICO.

La ecuación (2) puede reescribirse, definiendo una nueva variable  $l = t/v$ , en la forma:

$$l = a V + b \quad (4)$$

El error de modelación introducido al tomar como variable el cociente  $t/v$ , la no constancia del parámetro  $a$ , a lo largo de todo el proceso de filtración a presión (2.6), así como las distintas suposiciones hechas para tomar la ecuación (4), como representativa del proceso, se tienen en cuenta en este método, mediante la introducción, en el modelo predictivo, de un error global asociado al modelo.

Tomando  $V$  como variable dependiente y poniéndola en función de su valor en el tiempo anterior,  $V_j$  queda:

$$V = V_j + \frac{\Delta l}{a} \quad (5)$$

Como puede observarse, en este caso el modelo consta de dos variables y un sólo parámetro. Por lo tanto, únicamente se podrá obtener información acerca del valor de la pendiente de la recta (parámetro  $a$ ) ya que el cálculo de cada punto se realiza en base al anterior en el tiempo, en el cual queda implícito el valor de la ordenada en el origen.

Hay que tener en cuenta que tanto el volumen como el parámetro  $a$  no son valores exactos sino que vienen afectados de error se representarán mediante su media y su covarianza:

$$V_j \sim (\bar{V}_j, \Sigma V_j)$$

$$a_j \sim (\bar{a}_j, \Sigma a_j)$$

Asimismo hay que considerar el error asociado al modelo numérico (ecuación (4)), expresado por  $w_j \sim (0, Q)$ ; es decir, se considera con valor medio cero y covarianza  $Q$  constante.

### 2.2. APLICACION DEL MÉTODO.

La aplicación de este método incluye dos pasos:

En el primero es estima un nuevo valor del volumen y su covarianza para el tiempo  $i$ , a partir de la información obtenida hasta el tiempo anterior. Este paso se denomina modelo de predicción.

A continuación, partiendo del valor predicho para  $V$  y su covarianza y del valor experimental medido para ese mismo tiempo se recalculan  $a$ ,  $V$  y sus covarianzas. Esta parte es propiamente la aplicación del algoritmo de Kalman (ecuación 3).

#### 2.2.1. Modelo de predicción.

Para esta parte del cálculo los valores del parámetro  $a$  y su covarianza son los obtenidos en el intervalo anterior. Sin embargo, la incertidumbre del volumen, medida por su covarianza, debe modificarse puesto que es función no sólo de la incertidumbre de  $V$  y  $a$  en el tiempo anterior, sino también del error asociado al propio modelo numérico.

En el cálculo de la nueva covarianza interviene la denominada matriz de sensibilidad que está formada por las derivadas parciales de cada una de las variables respecto de cada uno de los parámetros. En el caso presente, dicha matriz queda reducida a:

$$D = \frac{\partial}{\partial a} (\bar{V}_{ij|i}) \quad (6)$$

El valor de esa matriz da idea de la rapidez y bondad del ajuste que se está realizando.

El cálculo del valor predicho del volumen se realiza mediante la aplicación de la ecuación 5.

## 2.2.2 Aplicación del algoritmo.

No se ha considerado conveniente exponer en este trabajo el desarrollo promenorizado de las ecuaciones que constituyen el método propuesto, dado que están suficientemente explícitas en los trabajos originales.

Para su aplicación se ha desarrollado un programa BASIC, que es en este caso de una gran simplicidad y cuyo listado puede remitirse a toda persona interesada en él.

### 3. APPLICACION.

Como ejemplo ilustrativo del método propuesto se muestra el ajuste de los datos obtenidos en uno de los experimentos de filtración a presión a escala de laboratorio.

La barbotina utilizada fue porcelana y se trabajó a una presión de 8 Kg/cm<sup>2</sup>.

Para la realización del ajuste se han hecho las consideraciones siguientes:

- el valor inicial de las covarianzas del volumen y del parámetro se tomaron de tal forma que permitieran abarcar los intervalos de variación previsibles, para ambos. Los valores asignados fueron:

$$\Sigma v = 100.00$$

$$\Sigma a = 0.001$$

- el valor inicial de la covarianza cruzada,  $\Sigma v.a$ , se ha supuesto nulo, dado que no se conoce a priori el signo de la correlación.

- el error de medición del volumen se ha tomado igual a 2 cm<sup>3</sup> intentando considerar no solo el error del aparato sino también los errores sistemáticos.

A fin de comprobar la aplicabilidad del método propuesto se han realizado dos ajustes, para el mismo experimento, tomando en cada caso un número diferente de datos.

En teoría, el número y calidad de los datos experimentales necesarios para evaluar los parámetros que definen un proceso son función de los valores de la matriz de sensibilidad, que actúa a través de las covarianzas cruzadas y de la matriz de ganancia de los parámetros. Un valor grande de esta matriz, provoca un ajuste rápido del parámetro así como una disminución en la incertidumbre.

En el caso en estudio la matriz de sensibilidad presenta un valor bastante elevado, por lo que en principio el número de observaciones a realizar no ha de ser muy grande.

El número de datos utilizados para los ajustes fue de 20 y 8 respectivamente, tomando en ambos casos valores a lo largo de todo el proceso de filtración. Los datos correspondientes a los tres primeros minutos de la operación no fueron considerados, ya que es necesario un cierto tiempo para establecer la presión de trabajo.

En las figuras 1 y 2 se ha representado el valor del parámetro  $a$  y el de dos veces su desviación típica, frente a 1 para los dos ajustes realizados. Puede observarse en ambos casos una buena convergencia, así como un grado de incertidumbre suficientemente pequeño (del orden de centésimas de la magnitud de  $a$ ).

En las figuras 3 y 4, se ha representado la diferencia entre el valor del volumen observado y el calculado así como el doble de su desviación típica en función de  $t$ . En ambos casos se puede observar que el error permanece en todo momento menor que el doble de la desviación típica, valor

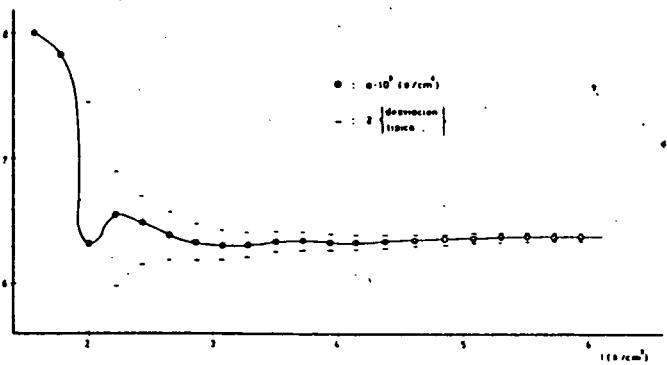


Figura 1.

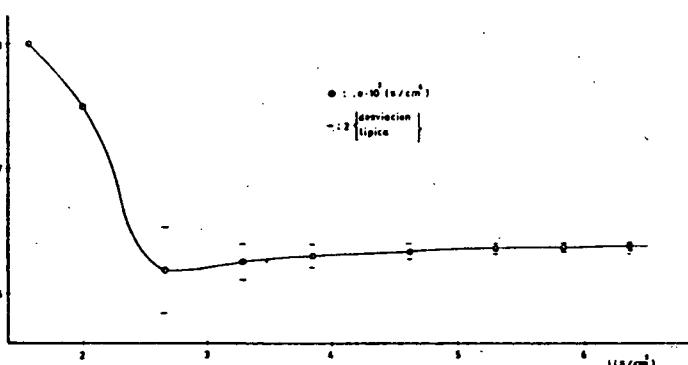


Figura 2.

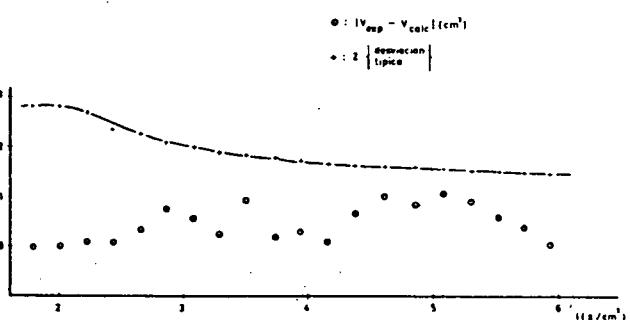


Figura 3.

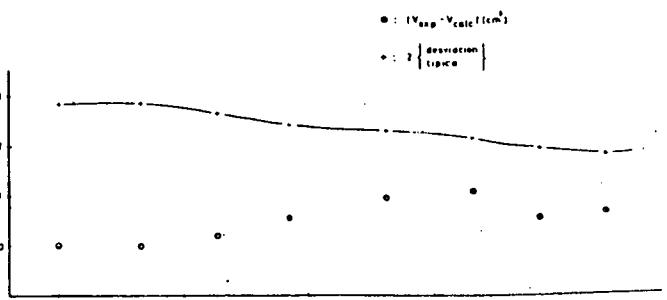


Figura 4.

que estadísticamente representa el 90% de probabilidad de obtener el valor exacto. Dado que la disminución en el grado de incertidumbre obtenido al realizar el ajuste con 20 valores en lugar de con 8 es muy pequeña, puede considerarse que es suficiente la realización de 8 ó 10 observaciones durante el proceso.

También hay que señalar la gran simplicidad del método desarrollado, lo cual da lugar a un ahorro en el proceso de tratamiento de los datos.

Por último y a fin de comparar el método propuesto con otros, se ha realizado un ajuste por el método de los mínimos cuadrados. Los valores de  $a$  obtenidos mediante ambos métodos se recogen en la tabla I. Pudiéndose observar que las diferencias son muy pequeñas. Pero hay que destacar que el método de los mínimos cuadrados no suministra ninguna información directa acerca de la incertidumbre del valor del parámetro ni considera los errores de medida de las variables y los errores asociados al modelo matemático representativo del proceso.

**TABLA I**

Método	nº puntos utilizados	a
Kalman	8	$6,372 \cdot 10^{-3}$
M.M.C.	8	$6,385 \cdot 10^{-3}$
Kalman	20	$6,377 \cdot 10^{-3}$
M.M.C.	20	$6,379 \cdot 10^{-3}$

También hay que tener en cuenta que un estudio estadístico muestra la necesidad de un mínimo de 30 valores a fin de poder aplicar la teoría de pequeñas muestras, y poder considerar la ecuación obtenida mediante el método de los mínimos cuadrados como representativa del proceso estudiado.

De todo ello se deduce la importancia del algoritmo de Kalman en el tratamiento de los datos del proceso de filtración.

## CONCLUSIONES.

Como conclusión de todo lo anteriormente expuesto puede deducirse que:

- El algoritmo estocástico de Kalman permite un ajuste riguroso del parámetro  $a$  de la ecuación que representa el proceso de filtración a presión constante dando a la vez el grado de incertidumbre.

- Es posible realizar el ajuste con un número muy reducido de valores, tomados a lo largo de la prueba de laboratorio lo cual, aunque no reduce la duración del experimento, ya que es necesario finalizar la filtración a fin de obtener el valor de la humedad final de la torta, permite un ahorro de tiempo en la toma y tratamiento de los datos experimentales.

## NOMENCLATURA

A	área de filtración, $\text{cm}^2$
a	coeficiente de la ecuación (2)
$\alpha$	resistencia específica de la torta, $\text{cm/g}$
b	coeficiente de la ecuación (2)
k	constante de conversión de Newtons a Dinas
e	cociente entre el tiempo y el volumen filtrado, $\text{s/cm}^3$

M	humedad final de la torta g. torta húmeda / g.torta seca.
$\mu$	viscosidad del filtrado, $\text{g/cm.s.}$
$\Delta P$	presión total aplicada, $\text{Nw/cm}^2$
Rm	resistencia del medio filtrante, $\text{cm}^{-1}$
$\rho$	densidad del filtrado $\text{g/cm}^3$
t	tiempo de filtración s
V	volumen filtrado, $\text{cm}^3$
x	concentración inicial de sólidos, g sólidos/g barbotina
$\Sigma V$	covarianza del volumen
$\Sigma a$	covarianza del parámetro a
$\Sigma V.a$	covarianza cruzada de V y a.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) A. Seco; A. Aucejo; M. Sancho-Tello; "Filtración a Presión de Pastas Cerámicas. I". Bol.Soc.Esp.Ceram.Vidrio. Vol.20-nº 3 (1980), 165-9.
- (2) J.H. Wilhelm: "The Use of Specific Resistance Data in Sizing Batch-type Pressure Filters". Journal W.P.C.F. (March 1978), 471-83.
- (3) D.A. Dahlstrom: "Predicting Performance of Continuous Filters". C.E.P., (March 1978), 69-74.
- (4) R.E. Kalman: "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". Journal of Basic Engineering, Vol. 82 D, (1960).
- (5) R.E. Kalman y R.S. Bucy: "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", Journal of Basic Engineering. Vol. 83 D, (1961).
- (6) F.M. Tiller y H.R. Cooper: "The Role of Porosity in Filtration: Part IV". A.I.Ch.E.J. 6 (1960), 595-601.